Concursul Naţional de Matematică

„LAURENŢIU DUICAN"

Braşov

– Monografie –

Ediţia a doua, adăugită

PARALELA 45
EDITURA

CUPRINS

PROBLEME PROPUSE

Clasa a VII-a

1. Să se demonstreze că dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, astfel încât $a+b+c=1$, atunci $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9$.

2. Mulţimea lungimilor laturilor şi diagonalelor unui trapez este T = {a, 2a, x, y}. Precizaţi toate tipurile de trapeze corespunzătoare mulţimii T, calculându-se x şi y în cazurile posibile.

Horea Banea, Braşov

3. Fie ABCD un paralelogram şi E punctul de intersecţie al bisectoarelor unghiurilor $\sphericalangle DAB$ şi $\sphericalangle ABC$.

Să se arate că $E \in CD$ dacă şi numai dacă $AB = 2 \cdot AD$.

Clasa a VIII-a

1. Să se arate că dacă $a_1, a_2, .., a_n > 0$ şi $a_1+a_2+...+a_n=1$, atunci:

$$\min\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right)=n^2.$$

2. Fie VABC un tetraedru şi P un punct arbitrar al feţei ABC. Paralelele prin P la muchiile VA, VB, VC intersectează celelalte feţe în A', B' respectiv C'.

Să se arate că: $\frac{PA'}{VA}+\frac{PB'}{VB}+\frac{PC'}{VC}=1$.

3. Fie cubul ABCDA'B'C'D' de latură a. Pe diagonala AC' şi pe diagonala DB' se iau punctele P şi respectiv Q astfel încât AP = x şi DQ = y.

a) Determinaţi PQ pentru $x=\frac{AC'}{2}$ şi $y=\frac{2}{3}DB'$, în funcţie de a.

b) Calculaţi în funcţie de x şi y distanţa PQ.

c) Determinaţi x şi y, pentru care PQ este minimă.

d) Găsiţi cel puţin două poziţii ale punctelor P şi Q, diferite de vârfurile cubului, pentru care PQ = a.

Acad. Nicolae Teodorescu

Clasa a IX-a

1. Să se construiască o funcţie f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu proprietăţile:

1) $f(x) \notin \mathbf{Z}, (\forall) x \in \mathbf{Z}$,

2) $f(f(x)) \in \mathbf{Z}, (\forall) x \in \mathbf{Z}$.

2. Să se rezolve în $\mathbf{Z}$ ecuaţia: $x^2 + x + 1 = 19y$ şi să se determine soluţiile cele mai mici în valoare absolută.

3. Se consideră numerele reale x, y, z şi $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ cu proprietatea că $(\exists)$ $k \in \mathbf{Z}$ astfel încât $x + y + z = (4k + 1)\pi$ şi $\sin x + \sin y + \sin z \geq 3\sin a$.

Să se arate că: $\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2} - \cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2} < \frac{1}{2}$.

4. În triunghiul ascuţitunghic ABC notăm cu D, E respectiv F, punctele de tangenţă ale cercului înscris cu laturile [BC], [CA], [AB]. Fie d_A, d_B, d_C dreptele paralele duse prin A, B, C la laturile [BC], [CA] şi respectiv [AB]. Notăm $FD \cap d_A = \{A_1\}, DE \cap d_A = \{A_2\}, ED \cap d_B = \{B_1\}, EF \cap d_B = \{B_2\}$, $EF \cap d_C = \{C_1\}, FD \cap d_C = \{C_2\}$. Dacă perimetrul triunghiului ABC este $k \in \mathbf{R}_+^*$, să se calculeze în funcţie de k suma: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2$.

Clasa a X-a

1. Fie $a, b \in \mathbf{Z}$, $a \neq b$ şi $f \in \mathbf{Z}[X]$ astfel încât $f(1) = 1$. Să se arate că:

a) dacă a şi b au aceeaşi paritate, atunci şi numerele f(a) şi f(b) au aceeaşi paritate;

b) dacă f(a) şi f(b) sunt pare, atunci a şi b sunt pare.

2. Să se rezolve în N* inecuaţia: $\lg C_{2x}^x \leq \frac{2}{x+1}\sum_{k=1}^{x} \lg C_x^k + \lg(x+1)$.

3. Fie $M \in \text{Int}[ABC]$ unde ABC este un triunghi echilateral. Notăm cu M_1, M_2, M_3 proiecţiile punctului M pe laturile (BC), (CA), (AB). Să se determine locul geometric al centrului de greutate al triunghiului $M_1M_2M_3$.

4. Să se arate că un tetraedru este echifacial dacă şi numai dacă triplul volumului este egal cu produsul bimedianelor. (Un tetraedru se numeşte echifacial dacă are feţele de arii egale, iar bimedianele sunt segmentele care unesc mijloacele a două muchii opuse ale unui tetraedru.)

Clasa a XI-a

1. Fie determinantul:

$$d_n(z)=\begin{vmatrix} z^n & z^{n-1} & z^{n-2} & \dots & z^3 & z^2 & z+1 \\ z^n & z^{n-1} & z^{n-2} & \dots & z^3 & z^2+1 & z \\ z^n & z^{n-1} & z^{n-2} & \dots & z^3+1 & z^2 & z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^n+1 & z^{n-1} & z^{n-2} & \dots & z^3 & z^2 & z \end{vmatrix},$$

$z\in\mathbf{C}$, $n=4k\in\mathbf{N}^*$. Să se afle mulţimea $A=\{z\in\mathbf{C}\mid (z-1)d_n(z)=-2\}$.

2. Fie $f:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$ o funcţie continuă, care are proprietăţile:
(1) $0<f(x)<x$, $\forall\, x>0$;
(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\dfrac{1}{f(x)}-\dfrac{1}{x}\right)=\ell>0$.

Definim şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ prin relaţia $x_{n+1}=f(x_n)$, $\forall\, n\geq 1$, unde $x_1\in\mathbf{R}_+^*$.
Să se demonstreze că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\sqrt[p]{n}=0$, $\forall\, p\in\mathbf{N}^*, p\geq 2$.

Romeo Ilie, Braşov

3. Să se determine funcţiile continue $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ cu proprietatea:

$$f(2x)-f(x)=x,\ \forall\, x\in\mathbf{R}.$$

4. Să se construiască o funcţie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ care să fie discontinuă în orice punct $x\in\mathbf{R}$ şi $f\circ f=1_{\mathbf{R}}$.

Clasa a XII-a

1. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o funcţie bijectivă, derivabilă, cu derivata continuă şi strict pozitivă, care are proprietatea: $f'(x)\cdot\int_0^x f(t)dt=\int_0^{f^{-1}(x)} f(t)dt$, $\forall\, x\in\mathbf{R}$.

Se cere: a) să se calculeze $f(0)$;
b) să se determine funcţia f.

Romeo Ilie, Braşov

2. Să se determine funcţiile $f:[a, ae]\to\mathbf{R}$, unde $a>0$, care sunt continue şi verifică: $\int_0^1 f^2(a\cdot e^x)dx\leq 2\int_1^e f(ax)\dfrac{\ln x}{x}dx-\dfrac{1}{3}$.

3. Dacă inelul $(A, +, \cdot)$ verifică proprietăţile:

a) $(xy)^3 = x^3y^3$, $\forall\, x, y \in A$;

b) $6x = 0 \Rightarrow x = 0$, $(x \in A)$,

atunci A este comutativ. Daţi un exemplu de inel necomutativ ce verifică a).

4. Se dau matricele

$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ şi $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ cu $\theta \in \mathbf{R}$ şi se consideră

mulţimea $G = \left\{ R_0, R_\pi, R_{\frac{\pi}{2}}, R_{\frac{3\pi}{2}}, iS_0, iS_\pi, iS_{\frac{\pi}{2}}, iS_{\frac{3\pi}{2}} \right\} \subseteq M_2(\mathbf{C})$.

1. Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup necomutativ.
2. Să se determine ordinele elementelor lui G.
3. Să se determine toate subgrupurile de ordin 2 ale lui G.

SOLUŢII

Clasa a VII-a

1. Avem $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+3$. Atunci $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 9$, deoarece $x+\frac{1}{x} \geq 2$, $\forall\ x > 0$ şi $a + b + c = 1$, conform ipotezei.

2. Se analizează cazurile:

a) trapez cu 3 elemente de lungimi egale;

b) trapez cu câte 2 perechi de elemente de lungimi egale.

3. Fie O mijlocul laturii AB. Cum $m(\sphericalangle AEB) = 90°$, avem $EO = \frac{1}{2}AB$. Dar $EO \parallel AD$ (secanta AE formează cu dreptele EO şi AD unghiuri alterne interne congruente). Atunci au loc echivalenţele: $E \in CD \Leftrightarrow EO = AD \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow AB = 2AD$.

Clasa a VIII-a

1. Conform inegalităţii dintre media armonică şi media aritmetică a n numere reale strict pozitive, avem: $\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+...+\dfrac{1}{a_n}} \le \dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$. Din $a_1+a_2+...+a_n=1$, obţinem $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+...+\dfrac{1}{a_n} \ge n^2$. Atunci:

$\min\left(\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}=n^2\right)$, deoarece egalitatea se obţine pentru $a_1=a_2=...=a_n=\dfrac{1}{n}$.

2. Fie $\{A_1\}=BC\cap(VAP)$. Avem $A' \in VA_1$ şi din Teorema fundamentală a asemănării deducem $\dfrac{PA'}{VA}=\dfrac{PA_1}{AA_1}$. Dar $\dfrac{PA_1}{AA_1}=\dfrac{S_{PBC}}{S_{ABC}}$. Rezultă $\sum\dfrac{PA_1}{AA_1}=1$ (relaţia lui Gergonne). Atunci $\sum\dfrac{PA'}{VA}=1$.

3. Fie $AC' \cap DB' = \{O\}$ (O – centrul cubului). Avem $AO=DO=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ şi $\cos(\sphericalangle AOD)=\dfrac{1}{3}$. Cum $OP=\left|x-\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right|$ şi $OQ=\left|y-\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right|$, aplicând teorema lui Pitagora generalizată în triunghiul OPQ, obţinem:

$PQ^2=x^2+y^2-\dfrac{2}{3}xy-\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}(x+y)+a^2$.

a) Pentru $x=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ şi $y=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$ găsim $PQ=OQ=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

b) $PQ=\sqrt{x^2+y^2-\dfrac{2}{3}xy-\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}(x+y)+a^2}$.

c) $PQ=0$ (deci $P=Q$) pentru $x=y=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

d) Se rezolvă ecuaţia în x: $x^2+y^2-\dfrac{2}{3}xy-\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}(x+y)=0$ pentru două valori distincte ale lui y aflate în intervalul $\left(0,a\sqrt{3}\right)$.

Clasa a IX-a

1. Putem considera, de exemplu, funcţia f: **R** → **R**, $f(x) = x + \frac{1}{2}$, pentru care $(f \circ f)(x) = x + 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

2. Determinăm valorile lui r ∈ {0, 1, ..., 18} pentru care $f(r) = r^2 + r + 1$ se divide cu 19. Astfel f(7) = 19 · 3, f(11) = 19 · 7 şi 19 nu divide f(r), ∀ r ∈ {0, 1, ..., 18} − {7, 11}. Apoi f(r + 19k) = f(r) + 19k(2r + 19k + 1), k ∈ **Z**, r ∈ {0, 1, ..., 18}. Rezultă că mulţimea soluţiilor ecuaţiei diofantice $x^2 + x + 1 = 19y$ este: $S = \{(19k + 7, 19k^2 + 15k + 3) \mid k \in \mathbf{Z}\} \cup \{(19k + 11, 19k^2 + 23k + 7) \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

Avem $\min\limits_{x-sol}|x| = \min\limits_{k \in Z}\{|19k + 7|, |19k + 11|\} = 7$ şi $\min\limits_{y-sol}|y| = \min\limits_{k \in Z}\{|19k^2 + 15k + 3|, |19k^2 + 23k + 7|\} = 3$.

3. Are loc relaţia: $\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2} - \cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2} = \frac{1}{4}\left[\sum\left(\sin\frac{x+y-z}{2} - \cos\frac{x+y-z}{2}\right) - \sin\frac{x+y+z}{2} - \cos\frac{x+y+z}{2}\right]$. Din condiţia x + y + z = = (4k + 1)π, k ∈ **Z**, obţinem: $\sin\frac{x+y+z}{2} = 1$, $\cos\frac{x+y+z}{2} = 0$,

$\sin\frac{x+y-z}{2} = \cos z$ şi $\cos\frac{x+y-z}{2} = \sin z$. Rezultă:

$\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2} - \cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2} = \frac{1}{4}(\cos x + \cos y + \cos z - 1 - \sin x - \sin y - \sin z) \le \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\sin a < \frac{1}{2}$.

4. Din congruenţele: $\sphericalangle AA_1F \equiv \sphericalangle BDF \equiv \sphericalangle BFD \equiv \sphericalangle AFA_1$ rezultă $AA_1 = AF =$ = p − a. Analog, $AA_2 = p - a$. Atunci $A_1A_2 = 2(p - a)$. Se obţine: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 2p = k$.

Clasa a X-a

1. a) Pentru k ∈ **N***, avem: $a^k - b^k = (a - b)\left(\sum_{i=0}^{k-1} a^{k-1-i}b^i\right)$, deci