

Discursul de inaugurare a Concursului de Matematică

„LAURENȚIU DUICAN”

Brașov, 15 mai 1982

Concursul Național de Matematică

„LAURENȚIU DUICAN”

Brașov

— Monografie —

Ediția a doua, adăugită



CUPRINS

Discursul de inaugurare a Concursului de Matematică „Laurențiu Duican”, Brașov, 15 mai 1992, rostit de Domnia Sa, acad. Nicolae Teodorescu, președintele SSM din România	5
Autorii problemelor propuse la Concursul de matematică „Laurențiu Duican”	11
EDIȚIA I, 14 – 16 MAI 1992.....	15
Probleme propuse.....	18
Soluții.....	21
Consemnări	28
Laureații primei ediții.....	29
EDIȚIA A II-A, 6 – 8 MAI 1993	31
Probleme propuse.....	34
Soluții.....	38
Discursul Domniei Sale, Dumitru Săvulescu, director general în Ministerul Învățământului, președinte onorific al Concursului	49
Laureații ediției a II-a.....	51
EDIȚIA A III-A, 5 – 7 MAI 1994.....	53
Articol conf. univ. dr. Bucur B. Ionescu	55
Probleme propuse.....	57
Soluții.....	61
Articol conf. univ. dr. V. Suceveanu	72
Laureații ediției a III-a.....	72
EDIȚIA A IV-A, 4 – 6 MAI 1995.....	77
O competiție a elitelor.....	79
Probleme propuse.....	81
Soluții.....	85

Laureații ediției a IV-a	98
EDIȚIA A V-A, 9 – 11 MAI 1996	101
Brașovul – capitală a matematicii!	103
Probleme propuse.....	104
Soluții.....	108
Laureații ediției a V-a.....	122
EDIȚIA A VI-A, 8 – 10 MAI 1997	125
Discursul Domniei Sale, conf. univ. dr. Bucur B. Ionescu, inspector general în Ministerul Educației Naționale.....	127
Probleme propuse.....	130
Soluții.....	135
Discursul Domniei Sale, acad. Petre Mocanu, președintele SSM din România	147
Laureații ediției a VI-a	148
Tinere minți luminate.....	150
EDIȚIA A VII-A, 7 – 9 MAI 1998.....	151
Discursul Domniei Sale, prof. Anna Farkas, inspector școlar general adj., ISJ Brașov	153
Probleme propuse.....	155
Soluții.....	160
Laureații ediției a VII-a	177
EDIȚIA A VIII-A, 6 – 8 MAI 1999	181
Articol prof. Laurențiu Năstase, vicepreședinte al Societății de Științe Matematice, Filiala Brașov	183
Probleme propuse.....	185
Soluții.....	189
Discursul Domniei Sale, prof. Florin Diac, secretar general al SSM din România.....	203
Laureații ediției a VIII-a.....	204

EDIȚIA A IX-A, 27 – 28 APRILIE 2000,	
susținută în cadrul Olimpiadei Naționale de Matematică, Brașov 2000	207
Discursul Domniei Sale, prof. Gabriel Răducanu,	
inspector general în Ministerul Educației Naționale.....	209
Test de selecție a lotului pentru Olimpiada Balcanică de Matematică	212
Soluții.....	212
Test de selecție a lotului	
pentru Olimpiada Internațională de Matematică	215
Soluții.....	215
Laureații ediției a IX-a	218
EDIȚIA A X-A, 10 – 12 MAI 2001	221
Matematica la vârf.....	223
Probleme propuse.....	225
Soluții.....	229
Facsimile cu soluții originale și ingenioase date unor probleme,	
direct în concurs, de către concurenți	237
Laureații ediției a X-a.....	251
EDIȚIA A XI-A, 15 – 17 MAI 2003	253
Cuvântul Domniei Sale, prof. univ. dr. Emil Stoica, decan al Facultății	
de Matematică, Universitatea „Transilvania“ Brașov.....	255
Probleme propuse.....	258
Soluții.....	263
Facsimile cu soluții originale și ingenioase date unor probleme,	
direct în concurs, de către concurenți	271
Spirit olimpic la Brașov.....	282
Laureații ediției a XI-a	283
EDIȚIA A XII-A, 6 – 8 MAI 2004.....	287
Discursul Domniei Sale, prof. univ. dr. Horea Banea,	
Universitatea „Transilvania“ Brașov	289
Probleme propuse.....	291
Soluții.....	295

Facsimile cu soluții originale și ingenioase date unor probleme, direct în concurs, de către concurenți	305
Cuvântul domniei sale prof. dr. Dumitru Bătinețu-Giurgiu reprezentant al Gazetei Matematice	313
Laureații ediției a XII-a	314
Discursul Domniei Sale, prof. univ. dr. Dorin Popescu, președintele SSM din România	318
Semnificații	319
EDIȚIA A XIII-A, 20 MAI 2005	321
Argument	323
Discursul Domniei Sale, prof. Florin Diac, director general în Ministerul Educației	326
Lansare de carte. Monografia Concursului Național de Matematică „Laurențiu Duican”, Editura Paralela 45, 2005	327
Monografia unui concurs de matematică. Aceasta înmănunchează roadele celor 12 ediții ale prestigioasei Competiții „Laurențiu Duican”, desfășurate din 1992 la Brașov	329
Dan Radu – Monografia. Concursului Național de Matematică „Laurențiu Duican”, Brașov, 1992-2004, Editura Paralela 45, Pitești, 2005	330
EDIȚIA A XIV-A, 18 – 20 MAI 2006	331
Prof. dr. Cătălin Ciupală – Referat asupra Concursului Național de Matematică „Laurențiu Duican” – Brașov, ediția a XIV-a, secțiunea de Comunicări științifice și creație	336
Facsimile din lucrările premiate la secțiunea matematică	337
Lect. univ. dr. Lucian Sasu – Referat. Sesiunea de Comunicări științifice – Informatică	344
Facsimile din lucrările premiate la secțiunea informatică	346
Laureații ediției a XIV-a	362
EDIȚIA A XV-A, 10 – 12 MAI 2007	365
Discursul Domniei Sale, prof. univ. dr. Dorin Popescu, Universitatea București, Institutul de Matematică „Simion Stoilow” al Academiei Române	369

Probleme propuse.....	370
Soluții.....	375
Laureații ediției a XV-a.....	385
Consemnări	387
 EDIȚIA A XVI-A, 14 – 16 MAI 2009	 389
Discursul Domniei Sale, prof. univ. dr. Dorin Popescu, Universitatea București, Institutul de Matematică.....	391
Probleme propuse.....	393
Soluții.....	398
Laureații ediției a XVI-a	407
Consemnări	409
 EDIȚIA A XVII-A, 19 – 21 MAI 2011.....	 411
Salutul doamnei insp. școlar prof. Cozeta Țion, ISJ Brașov	414
Prezentarea Domniei Sale, conf. univ. dr. Rugen Păltănea, Universitatea Transilvania, Brașov	415
Probleme propuse.....	417
Soluții.....	422
Facsimile cu soluții originale și ingenioase date unor probleme, direct în concurs, de către concurenți	431
Laureații ediției a XVII-a	441
Consemnări	444
 EDIȚIA A XVIII-A, 15 – 17 MAI 2014	 447
Salutul doamnei insp. școlar prof. Florica Zubașcu-Andreica ISJ Brașov.....	450
Discursul Domniei Sale, prof. Dorel Agache, directorul Colegiului Național „Andrei Șaguna” Brașov	451
Salutul Domniei Sale, prof. univ. dr. Emil Stoica, președintele Senatului Universității „Transilvania” Brașov	452
Prezentarea Domniei Sale, conf. univ. dr. Eugen Păltănea, Universitatea Transilvania, Brașov	453
Probleme propuse.....	454
Soluții.....	459

Facsimile cu soluții originale și ingenioase date unor probleme, direct în concurs, de către concurenți	471
Discursul Domniei Sale, prof. univ. dr. Radu Gologan, președintele Societății de Științe Matematice din România, președintele Concursului	482
Laureații ediției a XVIII-a	484
Laureații ai Concursului național de matematică „Laurențiu Duican“, Brașov, 1992 – 2014, medaliați la Olimpiadele Internaționale și la Olimpiada Balcanică.....	487
Profesorii de specialitate din comisiile de evaluare a lucrărilor la diverse ediții ale Concursului	490
Profesori din județele țării, colaboratori ai Concursului la diferite ediții, împreună cu loturile reprezentative	493
ILUSTRAȚII.....	499

PROBLEME PROPUSE

Clasa a VII-a

1. Să se demonstreze că dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, astfel încât $a + b + c = 1$, atunci $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$.

2. Mulțimea lungimilor laturilor și diagonalelor unui trapez este $T = \{a, 2a, x, y\}$. Precizați toate tipurile de trapeze corespunzătoare mulțimii T , calculându-se x și y în cazurile posibile.

Horea Banea, Brașov

3. Fie $ABCD$ un paralelogram și E punctul de intersecție al bisectoarelor unghiurilor $\angle DAB$ și $\angle ABC$.

Să se arate că $E \in CD$ dacă și numai dacă $AB = 2 \cdot AD$.

Clasa a VIII-a

1. Să se arate că dacă $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ și $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$, atunci:

$$\min \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) = n^2.$$

2. Fie $VABC$ un tetraedru și P un punct arbitrar al feței ABC . Paralelele prin P la muchiile VA, VB, VC intersectează celelalte fețe în A', B' respectiv C' .

Să se arate că: $\frac{PA'}{VA} + \frac{PB'}{VB} + \frac{PC'}{VC} = 1$.

3. Fie cubul $ABCD A'B'C'D'$ de latură a . Pe diagonala AC' și pe diagonala DB' se iau punctele P și respectiv Q astfel încât $AP = x$ și $DQ = y$.

a) Determinați PQ pentru $x = \frac{AC'}{2}$ și $y = \frac{2}{3} DB'$, în funcție de a .

b) Calculați în funcție de x și y distanța PQ .

c) Determinați x și y , pentru care PQ este minimă.

d) Găsiți cel puțin două poziții ale punctelor P și Q , diferite de vârfurile cubului, pentru care $PQ = a$.

Acad. Nicolae Teodorescu

Clasa a IX-a

1. Să se construiască o funcție $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ cu proprietățile:
1) $f(x) \notin \mathbf{Z}, (\forall) x \in \mathbf{Z}$,
2) $f(f(x)) \in \mathbf{Z}, (\forall) x \in \mathbf{Z}$.
2. Să se rezolve în $\mathbf{Z}$ ecuația: $x^2 + x + 1 = 19y$ și să se determine soluțiile cele mai mici în valoare absolută.
3. Se consideră numerele reale x, y, z și $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ cu proprietatea că
 $(\exists) k \in \mathbf{Z}$ astfel încât $x + y + z = (4k + 1)\pi$ și $\sin x + \sin y + \sin z \geq 3 \sin a$.
Să se arate că: $\sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{z}{2} - \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2} < \frac{1}{2}$.
4. În triunghiul ascuțitunghic ABC notăm cu D, E respectiv F, punctele de tangență ale cercului înscris cu laturile [BC], [CA], [AB]. Fie d_A, d_B, d_C dreptele paralele duse prin A, B, C la laturile [BC], [CA] și respectiv [AB]. Notăm $FD \cap d_A = \{A_1\}, DE \cap d_A = \{A_2\}, ED \cap d_B = \{B_1\}, EF \cap d_B = \{B_2\}, EF \cap d_C = \{C_1\}, FD \cap d_C = \{C_2\}$. Dacă perimetrul triunghiului ABC este $k \in \mathbf{R}_+^*$, să se calculeze în funcție de k suma: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2$.

Clasa a X-a

1. Fie $a, b \in \mathbf{Z}, a \neq b$ și $f \in \mathbf{Z}[X]$ astfel încât $f(1) = 1$. Să se arate că:
a) dacă a și b au aceeași paritate, atunci și numerele $f(a)$ și $f(b)$ au aceeași paritate;
b) dacă $f(a)$ și $f(b)$ sunt pare, atunci a și b sunt pare.
2. Să se rezolve în $\mathbf{N}^*$ inecuația: $\lg C_{2x}^x \leq \frac{2}{x+1} \sum_{k=1}^x \lg C_x^k + \lg(x+1)$.
3. Fie $M \in \text{Int}[ABC]$ unde ABC este un triunghi echilateral. Notăm cu M_1, M_2, M_3 proiecțiile punctului M pe laturile (BC), (CA), (AB). Să se determine locul geometric al centrului de greutate al triunghiului $M_1M_2M_3$.
4. Să se arate că un tetraedru este echifacial dacă și numai dacă triplul volumului este egal cu produsul bimedianelor. (Un tetraedru se numește echifacial dacă are fețele de arii egale, iar bimedianele sunt segmentele care unesc mijloacele a două muchii opuse ale unui tetraedru.)

Clasa a XI-a

1. Fie determinantul:

$$d_n(z) = \begin{vmatrix} z^n & z^{n-1} & z^{n-2} & \dots & z^3 & z^2 & z+1 \\ z^n & z^{n-1} & z^{n-2} & \dots & z^3 & z^2+1 & z \\ z^n & z^{n-1} & z^{n-2} & \dots & z^3+1 & z^2 & z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^n+1 & z^{n-1} & z^{n-2} & \dots & z^3 & z^2 & z \end{vmatrix},$$

$z \in \mathbb{C}$, $n = 4k \in \mathbb{N}^*$. Să se afle mulțimea $A = \{z \in \mathbb{C} \mid (z-1)d_n(z) = -2\}$.

2. Fie $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ o funcție continuă, care are proprietățile:

(1) $0 < f(x) < x$, $\forall x > 0$;

(2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{x} \right) = \ell > 0$.

Definim șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ prin relația $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \geq 1$, unde $x_1 \in \mathbb{R}_+^*$.

Să se demonstreze că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \sqrt[p]{n} = 0$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$.

Romeo Ilie, Brașov

3. Să se determine funcțiile continue $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea:

$$f(2x) - f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

4. Să se construiască o funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care să fie discontinuă în orice punct $x \in \mathbb{R}$ și $f \circ f = 1_{\mathbb{R}}$.

Clasa a XII-a

1. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție bijectivă, derivabilă, cu derivata continuă și strict pozitivă, care are proprietatea: $f'(x) \cdot \int_0^x f(t) dt = \int_0^{f^{-1}(x)} f(t) dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Se cere: a) să se calculeze $f(0)$;

b) să se determine funcția f .

Romeo Ilie, Brașov

2. Să se determine funcțiile $f: [a, ae] \rightarrow \mathbb{R}$, unde $a > 0$, care sunt continue și

verifică: $\int_0^1 f^2(a \cdot e^x) dx \leq 2 \int_1^e f(ax) \frac{\ln x}{x} dx - \frac{1}{3}$.

3. Dacă inelul $(A, +, \cdot)$ verifică proprietățile:

a) $(xy)^3 = x^3 y^3, \forall x, y \in A;$

b) $6x = 0 \Rightarrow x = 0, (x \in A),$

atunci A este comutativ. Dați un exemplu de inel necomutativ ce verifică a).

4. Se dau matricele

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ și } S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \text{ cu } \theta \in \mathbf{R} \text{ și se consideră}$$

$$\text{mulțimea } G = \left\{ R_0, R_\pi, R_{\frac{\pi}{2}}, R_{\frac{3\pi}{2}}, iS_0, iS_\pi, iS_{\frac{\pi}{2}}, iS_{\frac{3\pi}{2}} \right\} \subseteq M_2(\mathbf{C}).$$

1. Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup necomutativ.
2. Să se determine ordinele elementelor lui G .
3. Să se determine toate subgrupurile de ordin 2 ale lui G .

SOLUȚII

Clasa a VII-a

1. Avem $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + 3$. Atunci

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9, \text{ deoarece } x + \frac{1}{x} \geq 2, \forall x > 0 \text{ și } a + b + c = 1, \text{ conform ipotezei.}$$

2. Se analizează cazurile:

a) trapez cu 3 elemente de lungimi egale;

b) trapez cu câte 2 perechi de elemente de lungimi egale.

3. Fie O mijlocul laturii AB . Cum $m(\angle AEB) = 90^\circ$, avem $EO = \frac{1}{2}AB$. Dar

$EO \parallel AD$ (secanta AE formează cu dreptele EO și AD unghiuri alterne interne congruente). Atunci au loc echivalențele: $E \in CD \Leftrightarrow EO = AD \Leftrightarrow \Leftrightarrow AB = 2AD$.

Clasa a VIII-a

1. Conform inegalității dintre media armonică și media aritmetică a n numere reale strict pozitive, avem:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$, obținem $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq n^2$. Atunci:

$$\min \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} = n^2 \right), \text{ deoarece egalitatea se obține pentru } a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}.$$

2. Fie $\{A_1\} = BC \cap (VAP)$. Avem $A' \in VA_1$ și din Teorema fundamentală a asemănării deducem $\frac{PA'}{VA} = \frac{PA_1}{AA_1}$. Dar $\frac{PA_1}{AA_1} = \frac{S_{PBC}}{S_{ABC}}$. Rezultă $\sum \frac{PA_1}{AA_1} = 1$

(relația lui Gergonne). Atunci $\sum \frac{PA'}{VA} = 1$.

3. Fie $AC' \cap DB' = \{O\}$ (O – centrul cubului). Avem $AO = DO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ și

$\cos(\angle AOD) = \frac{1}{3}$. Cum $OP = \left| x - \frac{a\sqrt{3}}{2} \right|$ și $OQ = \left| y - \frac{a\sqrt{3}}{2} \right|$, aplicând teorema

lui Pitagora generalizată în triunghiul OPQ , obținem:

$$PQ^2 = x^2 + y^2 - \frac{2}{3}xy - \frac{2a\sqrt{3}}{3}(x+y) + a^2.$$

a) Pentru $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ și $y = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ găsim $PQ = OQ = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

b) $PQ = \sqrt{x^2 + y^2 - \frac{2}{3}xy - \frac{2a\sqrt{3}}{3}(x+y) + a^2}.$

c) $PQ = 0$ (deci $P = Q$) pentru $x = y = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

d) Se rezolvă ecuația în x : $x^2 + y^2 - \frac{2}{3}xy - \frac{2a\sqrt{3}}{3}(x+y) = 0$ pentru două valori distincte ale lui y aflate în intervalul $(0, a\sqrt{3})$.

Clasa a IX-a

1. Putem considera, de exemplu, funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{2}$, pentru care $(f \circ f)(x) = x + 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

2. Determinăm valorile lui $r \in \{0, 1, \dots, 18\}$ pentru care $f(r) = r^2 + r + 1$ se divide cu 19. Astfel $f(7) = 19 \cdot 3$, $f(11) = 19 \cdot 7$ și 19 nu divide $f(r)$, $\forall r \in \{0, 1, \dots, 18\} - \{7, 11\}$. Apoi $f(r + 19k) = f(r) + 19k(2r + 19k + 1)$, $k \in \mathbf{Z}$, $r \in \{0, 1, \dots, 18\}$. Rezultă că mulțimea soluțiilor ecuației diofantice $x^2 + x + 1 = 19y$ este: $S = \{(19k + 7, 19k^2 + 15k + 3) \mid k \in \mathbf{Z}\} \cup \{(19k + 11, 19k^2 + 23k + 7) \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

Avem $\min_{x=\text{sol}} |x| = \min_{k \in \mathbf{Z}} \{|19k + 7|, |19k + 11|\} = 7$ și $\min_{y=\text{sol}} |y| = \min_{k \in \mathbf{Z}} \{|19k^2 + 15k + 3|, |19k^2 + 23k + 7|\} = 3$.

3. Are loc relația: $\sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{z}{2} - \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2} = \frac{1}{4} \left[\sum \left(\sin \frac{x+y-z}{2} - \cos \frac{x+y-z}{2} \right) - \sin \frac{x+y+z}{2} - \cos \frac{x+y+z}{2} \right]$. Din condiția $x + y + z = (4k + 1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, obținem: $\sin \frac{x+y+z}{2} = 1$, $\cos \frac{x+y+z}{2} = 0$,

$\sin \frac{x+y-z}{2} = \cos z$ și $\cos \frac{x+y-z}{2} = \sin z$. Rezultă:

$$\sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{z}{2} - \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2} = \frac{1}{4} (\cos x + \cos y + \cos z - 1 - \sin x - \sin y - \sin z) \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \sin a < \frac{1}{2}.$$

4. Din congruențele: $\angle AA_1F \equiv \angle BDF \equiv \angle BFD \equiv \angle AFA_1$ rezultă $AA_1 = AF = p - a$. Analog, $AA_2 = p - a$. Atunci $A_1A_2 = 2(p - a)$. Se obține: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 2p = k$.

Clasa a X-a

1. a) Pentru $k \in \mathbf{N}^*$, avem: $a^k - b^k = (a - b) \left(\sum_{i=0}^{k-1} a^{k-1-i} b^i \right)$, deci